

La linea sacra di S. Michele e la sfericità terrestre

di Fabio Crosilla



Nel 709, l'Arcangelo apparve a Saint Aubert, esortandolo a costruire una chiesa nella roccia. I lavori iniziarono subito, ma l'abbazia benedettina non fu completamente costruita fino all'anno 900. (Foto Ryan R Zhao, CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons)

Secondo diverse fonti, non del settore cartografico, la Linea Sacra di San Michele unisce sette santuari dedicati all'Arcangelo, dall'Irlanda a Israele, con una misteriosa e suggestiva linea retta. L'articolo, dopo aver ricordato la generale arbitrarietà di tale affermazione in un contesto cartografico, dimostra in maniera statisticamente rigorosa che la Linea Sacra di S. Michele segue effettivamente una linea retta sulla rappresentazione di Mercatore, dimostrando così l'appartenenza dei sette santuari ad una curva lossodromica sulla superficie terrestre. Si riportano infine i risultati dello studio di allineamento della Linea Sacra con il tramonto del sole nel giorno del solstizio d'estate.

Ai numerosi fenomeni inspiegabili che si verificano attorno a noi, l'uomo ha da sempre cercato una giustificazione che coinvolgesse il soprannaturale. Uno di questi è la cosiddetta Linea Sacra di San Michele Arcangelo, che collega sette santuari ubicati in Europa Occidentale, nel bacino del Mediterraneo e in Israele. Il tracciato ha inizio in Irlanda, su un'isola deserta, con il monastero di Skelling Michael del VI secolo a cui fa seguito il monastero Saint Michael's Mount in Cornovaglia del XVI secolo. Il terzo monastero è Mont Saint Michel in Normandia del X secolo, mentre il quarto è la Sacra di San Michele in val di Susa anch'esso del X secolo. Seguono poi il santuario di San Michele Arcangelo sul Gargano, in Puglia del V secolo, il monastero di San Michele Arcangelo di Panormitis, nell'isola di Simi in Grecia (V secolo) ed infine quello del Monte Carmelo, in prossimità della città di Haifa in Israele del XIX secolo, fondato su una grotta che fu dimora del profeta

Elia, già citata in documenti egizi del XIV secolo A.C.

La linea sacra di San Michele è celebre perché i vari santuari sono collegati fra loro da una linea retta che, secondo la leggenda, è frutto del colpo di spada che S. Michele Arcangelo inflisse al Diavolo per rimandarlo all'inferno. Inoltre è interessante il fatto che tutti questi santuari furono costruiti indipendentemente l'uno dall'altro, quasi tutti ospitando una o più apparizioni dell'Arcangelo. Parlare di una linea retta su una rappresentazione, che nella fattispecie è di tipo cartografico, è improprio, in quanto le caratteristiche geometriche degli elementi riprodotti dipendono dalla cartografia utilizzata. Come è ben noto, tutte le cartografie deformano la realtà (pseudo) sferica della superficie terrestre. Riprodurre su un piano gli elementi geometrici di una superficie a doppia curvatura, come è quella terrestre, richiede necessariamente l'introduzione di deformazioni che possono essere di tipo lineare, angolare e areale.

Ne segue che la linea sacra di San Michele Arcangelo può essere rappresentata con una retta su un tipo di cartografia, ed allo stesso tempo può corrispondere ad una curva su un'altra rappresentazione cartografica. Proprio questo fatto viene appellato da alcuni interlocutori, poco avvezzi con le rappresentazioni cartografiche, per denigrare il fenomeno.

Per venire a capo del problema sarebbe pertanto necessario fare analoghe considerazioni sulla superficie che non subisce deformazioni, cioè sulla superficie terrestre.

Per chiarire il problema è stato condotto un semplice esperimento che ha consentito di giungere ad un risultato di sicuro interesse.

Si è dapprima preso in considerazione un estratto della rappresentazione di Mercatore per la zona interessata dalla Linea Sacra di San Michele Arcangelo. La rappresentazione di Mercatore gode della proprietà di essere "conforme", cioè di conservare gli angoli misurati sulla superficie terrestre e sulla rappresentazione. In base a questa proprietà, sulla rappresentazione di Mercatore le trasformate dei meridiani e dei paralleli si intersecano ad angolo retto come sulla superficie terrestre. Dopo aver riportato sulla rappresentazione di Mercatore la posizione geografica dei sette santuari e dopo averli graficamente collegati fra loro, si evince visivamente che gli stessi si dispongono secondo una linea retta che collega il punto che rappresenta il Monastero di Skelling Michael con quello di Haifa in Israele (vedi Fig.1).

Per fornire un riscontro rigoroso all'affermazione che i sette santuari si dispongono secondo una linea retta sulla rappresentazione di Mercatore, è necessario però eseguire una serie di calcoli basati sull'impiego di alcuni principi della statistica matematica applicati ad un problema specificamente di natura geometrica. La procedura di calcolo e i risultati ottenuti sono riportati di seguito. I risultati confermano quanto intuitivamente interpretato visivamente sulla rappresentazione cartografica di Mercatore.

MODELLO ANALITICO

Una delle proprietà della rappresentazione di Mercatore è quella che garantisce che linee rette sulla rappresentazione corrispondano alle cosiddette linee "lossodromiche" sulla superficie terrestre. Si ricorda che una linea lossodromica è la curva descritta sulla superficie terrestre che interseca i meridiani con lo stesso angolo definito sulla rappresentazione di Mercatore dalla trasformata dei meridiani e dalla retta considerata. Molto usata nella navigazione marittima, consente ad un

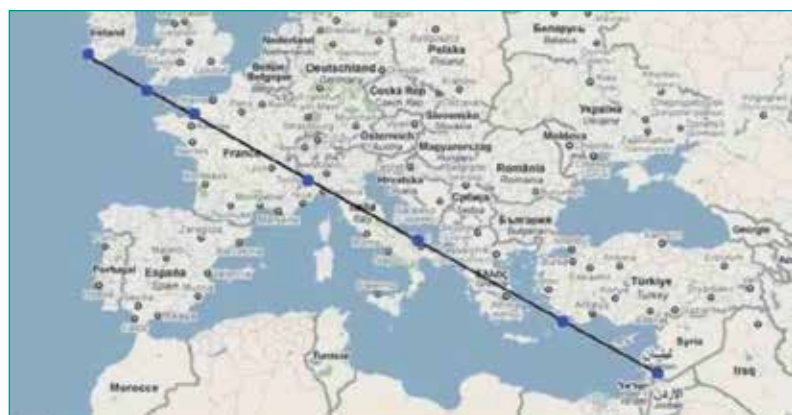


Fig. 1 - La Linea Sacra di S. Michele (Aleteia.org)

natante di navigare da un porto ad un altro mantenendo sempre lo stesso angolo di rotta.

La proprietà della curva lossodromica, che sulla superficie terrestre unisce fra loro i sette santuari, è pertanto quella di conservare lo stesso angolo di direzione per i vari tratti.

L'esperimento numerico è stato condotto partendo dalle coordinate geografiche (latitudine e longitudine) dei sette santuari riportate da Wikipedia (fonte Open Street Map, ellissoide WGS84)

1.	<i>Skelling Michael</i>	51°46'16" N	10°32'26" W
2.	<i>Saint Michael's Mount</i>	50°06'58" N	05°28'38" W
3.	<i>Mont Saint Michel</i>	48°38'10" N	01°30'40" W
4.	<i>Sacra di San Michele val di Susa</i>	45°05'52" N	07°20'36" E
5.	<i>San Michele Arcangelo Gargano</i>	41°42'29" N	15°57'17" E
6.	<i>San Michele Arcangelo di Panormitis</i>	36°32'54" N	27°50'46" E
7.	<i>Monte Carmelo, Haifa</i>	32°49'36" N	34°58'13" E

Tab. 1 Coordinate geografiche dei sette santuari, da Wikipedia (sistema sessagesimale)

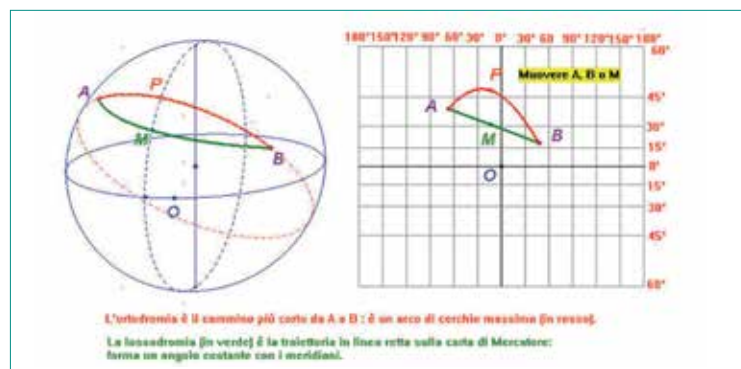


Fig.2 Rappresentazione di Mercatore. Le curve lossodromica (in verde) e ortodromica (in rosso) (dm.unife.it)

Utilizzando una routine di calcolo del software QGIS, sono state calcolate le coordinate cartografiche nella rappresentazione di Mercatore dei sette santuari.

1.	<i>Skelling Michael</i>	6725257.50 N	-1173369.28 W
2.	<i>Saint Michael's Mount</i>	6433601.56 N	-609721.59 W
3.	<i>Mont Saint Michel</i>	6181254.95 N	-168216.12 W
4.	<i>Sacra di San Michele val di Susa</i>	5606650.53 N	817456.13 W
5.	<i>San Michele Arcangelo Gargano</i>	5088911.03 N	1776071.55 W
6.	<i>San Michele Arcangelo di Panormitis</i>	4350889.24 N	3099814.91 W
7.	<i>Monte Carmelo, Haifa</i>	3849157.82 N	3892873.52 W

Tab. 2 Coordinate cartografiche nel sistema di Mercatore dei sette santuari (in metri)

Non conoscendo il grado di precisione e accuratezza delle coordinate geografiche riportate su Wikipedia e neppure il livello di semplificazione del modello analitico utilizzato per trasformare le coordinate nella rappresentazione di Mercatore, è necessario procedere con un processo di calcolo, il più possibile rigoroso, tale da evidenziare e quantificare le possibili incertezze geometriche. Come è ben noto, gli errori con i quali ogni prova sperimentale deve confrontarsi sono essenzialmente di tre tipi: accidentali, sistematici e grossolani. I primi sono di piccola entità e fluttuano casualmente attorno al valore vero. Gli errori sistematici sono dovuti ad un errore di modellazione del fenomeno o a una cattiva calibrazione delle osservazioni. Gli errori grossolani sono dovuti alla sbadataggine dell'operatore e la loro presenza è di regola molto ridotta nel campione.

La classica teoria degli errori prevede di procedere con il calcolo rigoroso dei parametri incogniti del problema ipotizzando la presenza esclusiva di errori accidentali nelle osservazioni, demandando ad una verifica finale l'eventuale presenza di errori di altra natura. Tale procedura è stata seguita per verificare le caratteristiche geometriche della Sacra Linea di San Michele.

Si è ipotizzata una linea retta congiungente i sette santuari. L'equazione della retta è:

$$y-v = mx + q$$

dove x e y sono le coordinate di Mercatore (W e N) dei sette punti;

m è il valore della tangente dell'azimut della retta;

q è il valore dell'intercetta per x = 0 (lungo il meridiano di Greenwich)

v è il residuo incognito della coordinata y dovuto alla presenza di errori.

Per stimare il valore delle incognite del problema (m e q), è stato applicato ai residui v_i il principio statistico dei minimi quadrati ($\sum v_i^2 = \min$).

Il sistema di equazioni della retta risulta, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

che, in forma compatta, si può anche scrivere

$$AX=Y-V$$

Applicando la condizione $\sum v_i^2 = \min$ si perviene alla soluzione ai minimi quadrati \hat{X} del vettore X:

$$\hat{X} = (A'A)^{-1}A'Y \quad (2)$$

Il vettore \hat{X} contiene la stima ai minimi quadrati della tangente dell'azimut della retta (\hat{m}) e dell'intercetta (\hat{q}).

Noto il vettore \hat{X} , è sempre possibile procedere alla stima ai minimi quadrati delle coordinate di partenza contenute nel vettore Y

$$\hat{Y} = A\hat{X} \quad (3)$$

al vettore dei residui \hat{V} incogniti

$$\hat{V} = Y - \hat{Y} \quad (4)$$

e allo scarto quadratico medio a posteriori delle osservazioni (coordinate dei punti)

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{V}'\hat{V})/(n-r) \quad (5)$$

dove

n è il numero delle equazioni (in questo caso 7)

r è il numero delle incognite (in questo caso 2).

Un ulteriore parametro per definire la qualità della stima è la cosiddetta matrice di varianza covarianza Σ_x del vettore delle incognite \hat{X}

$$\Sigma_x = \hat{\sigma}^2(A'A)^{-1} \quad (6)$$

da cui è possibile ottenere lo scarto quadratico medio dei termini incogniti (m e q) come radice quadrata dei termini diagonali della matrice Σ_x .

E' necessario infine verificare il tipo di distribuzione degli scarti v_i , ottenuti con la formula (4).

Ovvero è necessario verificare se gli scarti v_i seguono una distribuzione normale a media nulla, confermando così sia la loro appartenenza alla categoria degli errori accidentali che la correttezza del modello analitico adottato (equazione di una retta che unisce i sette santuari).

Per raggiungere questo obiettivo è necessario calcolare la matrice di varianza-covarianza del vettore \hat{V} degli scarti stimati, dalla seguente formula:

$$\Sigma_v = \hat{\sigma}^2[I - A(A'A)^{-1}A'] \quad (7)$$

Dividendo ciascun residuo per lo scarto quadratico medio corrispondente, che si ottiene come radice quadrata del termine diagonale della matrice Σ_v , è possibile calcolare il valore del residuo standardizzato $z_i = v_i/\sigma_{v_i}$.

La teoria statistica afferma che se il valore standardizzato così ottenuto è minore o uguale in valore assoluto a $|1,96|$, allora si può concludere che il residuo è distribuito normalmente a media nulla e varianza 1, cioè appartiene alla categoria degli errori accidentali, con un intervallo di confidenza del 95%.

RISULTATI

Per verificare le caratteristiche geometriche della linea che unisce i sette santuari sono stati condotti alcuni esperimenti numerici che hanno fornito i risultati riportati di seguito. Per semplificare le operazioni di calcolo, tenuto anche conto della probabile scarsa accuratezza delle coordinate geografiche (latitudine e longitudine) dei sette punti, dedotte da Wikipedia, i valori numerici delle coordinate di Mercatore dei punti sono stati approssimati al chilometro. Per tale ragione la precisione finale dei risultati deve considerarsi limitata al chilometro.

Applicando il modello analitico della retta, sono stati calcolati la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti riportati nella formula (1). Dopo aver applicato il principio dei minimi quadrati, sono stati stimati con la formula (2) i parametri incogniti della retta, [il valore della tangente dell'azimut della retta (m) e l'intercetta (q)].

Mediante le formule (3), (4), (5) e (6), sono stati poi calcolati ed estratti i termini diagonali della matrice di varianza - covarianza delle incognite. La radice quadrata di tali valori fornisce gli scarti quadratici medi da associare al valore della tangente dell'azimut della retta e al valore dell'intercetta. Passando dal valore della tangente all'angolo di direzione, si ottiene:

$119^{\circ},4955 \pm 0^{\circ},2546$
(in gradi sessadecimali)
mentre l'intercetta vale
 6079 ± 9 (in chilometri).

Per confermare la significatività di questi risultati, dalle coordinate di Mercatore dei punti sono stati calcolati manualmente, per ogni singolo tratto della spezzata, i corrispondenti angoli di direzione. Questi risultano essere (in gradi sessadecimali):

$Az(1-2) = 117^{\circ},3590$
 $Az(2-3) = 119^{\circ},7505$
 $Az(3-4) = 120^{\circ},2403$
 $Az(4-5) = 118^{\circ},3731$
 $Az(5-6) = 119^{\circ},1408$
 $Az(6-7) = 122^{\circ},3196$

La media degli angoli di direzione e l'errore quadratico medio della serie di valori sono:

$$Az(m) = 119^{\circ},5306 \pm 1^{\circ},5566$$

Si noti la corrispondenza fra la media dei singoli tratti ($119^{\circ},5306$) e il valore risultante dal calcolo rigoroso, ottenuto applicando il principio dei minimi quadrati ($119^{\circ},4955$). Inoltre, moltiplicando per 1,96 il valore dell'errore quadratico medio, ed associando tale intervallo alla media $Az(m)$, si evince che tutti i valori degli angoli di direzione ricadono entro tale intervallo, confermando il fatto che tutti i valori si possono considerare affetti da errori accidentali con un intervallo di confidenza pari al 95%.

Ritornando al modello di calcolo rigoroso, l'analisi successiva ha consentito di verificare l'appartenenza dei residui delle equazioni ad una distribuzione normale a media 0 e varianza 1. Il vettore dei residui (in chilometri) calcolato con la formula (3) risulta:

$$[-18, 9, 7, -10, 14, 25, -28]'$$

Si noti immediatamente l'entità dei residui dei punti 7 e 8, ovvero i monasteri Panormitis sull'isola di Simi e il Monte Carmelo vicino ad Haifa. L'entità di tali valori sembrerebbe rigettare a prima vista il modello di una retta che unisce i sette santuari.

In realtà, procedendo con il calcolo dei residui standardizzati, è stato possibile rifiutare tale ipotesi. Con la formula (7) sono stati calcolati gli scarti quadratici medi dei residui. Facendo il rapporto dei residui e dei rispettivi scarti quadratici medi, si ottengono i seguenti valori:

$$[-1,07; 0,53; 0,37; -0,53; 0,75; 1,47; -1,90]'$$

Come si può vedere anche i residui standardizzati del monastero dell'Isola di Simi e del Monte Carmelo sono inferiori al valore soglia di $|1,96|$, garantendo l'appartenenza dei punti ad un'unica retta sulla rappresentazione di Mercatore, con un intervallo di confidenza del 95%.

Un'ulteriore caratteristica che viene attribuita alla Linea Sacra di san Michele è il fatto che tutti i sette punti siano allineati lungo la direzione del tramonto del sole in occasione del solstizio estivo. Il fatto che i punti si allineino sulla superficie terrestre secondo una linea lossodromica, sembra ribadire la veridicità di tale affermazione. In base ai calcoli rigorosi sopra riportati, tale allineamento dovrebbe verificarsi con un azimut di $119^{\circ},4955$ a partire dalla direzione Sud in senso orario. Il fatto di utilizzare la direzione Sud come origine dell'azimut del tramonto del sole appartiene alla cultura astronomica.

Attingendo da uno dei fogli elettronici presenti su internet, è possibile, note le coordinate geo-

grafiche di un punto, il giorno e l'ora, calcolare la posizione del sole in un dato istante (azimut ed elevazione). Fissando a zero il valore dell'elevazione, è possibile calcolare l'azimut al tramonto. Di seguito sono riportati i valori dell'azimut del sole al tramonto del 21 giugno 2021 (solstizio estivo) per i sette punti della Linea Sacra di San Michele calcolati con il foglio elettronico fornito da centrometeo.com. (valori espressi in gradi sessadecimali).

Come si può notare, esiste una corrispondenza sorprendente fra l'azimut della lossodromica fornito dal calcolo rigoroso (119°,4955) e l'azimut del tramonto del sole per i monasteri di Panormitis, sull'isola di Simi, e sul Monte Carmelo. Tale valore tende a variare sistematicamente fino a raggiungere una deviazione massima

piuttosto un invito a mantenere nel corso della nostra vita la medesima direzione, la medesima condotta, auspicabilmente rivolta al bene, evitando di sbandare e di perdere la retta via.

Il colpo di spada, la linea ortodromica, rappresenta una scorciatoia, il percorso di minima lunghezza, che non consente, in generale, di conservare la stessa direzione di marcia.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano i colleghi Alberto Beinat ed Eleonora Maset per la collaborazione nella fase di elaborazione dei dati.

Si ringrazia inoltre il prof. Luigi Tomasi dell'Università di Ferrara per aver acconsentito l'utilizzo dell'immagine riportata nella figura 2.

1.	<i>Skelling Michael</i>	130°,85
2.	<i>Saint Michael's Mount</i>	129°,13
3.	<i>Mont Saint Michel</i>	127°,76
4.	<i>Sacra di San Michele val di Susa</i>	125°,05
5.	<i>San Michele Arcangelo Gargano</i>	122°,69
6.	<i>San Michele Arcangelo di Panormitis</i>	120°,04
7.	<i>Monte Carmelo, Haifa</i>	118°,66

Tab. 2 Coordinate cartografiche nel sistema di Mercatore dei sette santuari (in metri).

di 10° circa in corrispondenza dei monasteri inglese e irlandese. Si tratta di un valore contenuto, difficile da cogliere senza una strumentazione adeguata, ma che, in ogni caso, indica una lieve deviazione sistematica di allineamento della lossodromica e della direzione di tramonto del sole per i punti della Linea Sacra in occasione del solstizio estivo.

CONCLUSIONI

Ritornando a considerazioni di natura mitologica, la leggenda, che vorrebbe che la linea fosse stata generata da un colpo di spada che San Michele Arcangelo inflisse al Diavolo, è scarsamente proponibile, in quanto il colpo di spada avrebbe dato origine ad una curva "ortodromica" e non lossodromica. La curva ortodromica (fig. 2), è la sezione normale alla superficie terrestre, di minima lunghezza fra tutte le possibili linee congiungenti i due estremi. Corrisponde al percorso seguito dagli aerei per minimizzare il tempo di percorrenza e risparmiare carburante. Sembra quindi che il messaggio che metaforicamente i sette santuari allineati vogliono darci sia

PAROLE CHIAVE

ORTODROMIA, LOSSODROMIA, SAN MICHELE, LINEA SACRA

ABSTRACT

According to several sources, not from the cartographic world, the Sacred Line of San Michele unites seven dedicated shrines to the Archangel, from Ireland to Israel, with a mysterious and suggestive straight line. The article, after recalling the general arbitrariness of this statement in a cartographic context, demonstrates in a manner statistically strict that the Line Sacra di S. Michele actually follows a straight line on the representation of Mercator, thus proving the membership of the seven sanctuaries at a rhumb line on the earth surface.

AUTORE

FABIO CROSILLA
 FABIO.CROSILLA@UNIUD.IT
 GIÀ PROFESSORE ORDINARIO
 DIPARTIMENTO POLITECNICO DI INGEGNERIA
 E ARCHITETTURA
 UNIVERSITÀ DI UDINE

Tecnologie per le Scienze della Terra e del Mare



Strumenti ad alta tecnologia anche a noleggio per:

Studio dei fondali e delle coste

Multibeam, SSS, SBP, sismica marina ...

Ingegneria civile

Georadar 3D, laser scanner, inclinometri ...

Monitoraggio sismico

Sismometri, strong motion, reti early warning ...

Studio del sottosuolo

Georadar, sismica, geoelettrica ...

Monitoraggio ambientale

Magnetometri, elettromagnetismo,
sonde oceanografiche ...



CODEVINTEC

Tecnologie per le Scienze della Terra e del Mare

tel. +39 02 4830.2175 | info@codevintec.it | www.codevintec.it